

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕАВТОНОМНЫХ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.В. Вареникова

Филиал Брянского государственного университета им. акад. И. Г. Петровского, Новозыбков, Россия
varenikovaev@yandex.ru

В настоящей работе с помощью отражающей функции (ОФ) исследуется одна двумерная дифференциальная кубическая система с периодическими по времени коэффициентами.

Напомним, что ОФ [1] системы

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in R, \quad x \in D \subset R, \quad (1)$$

с общим решением $\varphi(t, t_0, x_0)$, является вектор-функция $F(t, x)$, определяемая формулой $F(t, x) = \varphi(-t, t, x)$. Если $F(t, x)$ есть ОФ для системы (1), то $F(-\omega, x)$ есть отображение за период $[-\pi; \pi]$ (отображение Пуанкаре) этой системы.

Если $\Delta(t, x)$ есть вектор-функция, удовлетворяющая соотношению

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} - \frac{\partial X(t, x)}{\partial x} \Delta = 0, \quad (2)$$

то при любой непрерывной скалярной нечетной функции $\alpha(t)$ система $\dot{x} = X(t, x) + \alpha(t)\Delta(t, x)$ имеет такую же ОФ как и система (1) (см. [2]).

Теорема. *Все решения системы*

$$\frac{dx}{dt} = Ax \cos t + x^3 P^2 e^{2C \sin t} - 2x^2 y P e^{C \sin t} \sin t + xy^2 \sin t,$$

$$\frac{dy}{dt} = Bx e^{C \sin t} \cos t + x^2 P^3 e^{3C \sin t} - 2x^2 y P^2 e^{2C \sin t} \sin t + xy^2 P e^{C \sin t} \sin t, \quad (3)$$

где $P = B/(C + A)$, $A \neq -C$, продолжимые на $[-\pi; \pi]$, являются периодическими.

Доказательство. Согласно общему принципу из [1], для того чтобы продолжимое на $[-\pi; \pi]$ решение было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы точка (x, y) была неподвижной точкой отображения Пуанкаре, то есть чтобы было $F(-\omega; x, y) = (x, y)$, где $F(t; x, y)$ есть ОФ системы (3).

Убедиться в том, что система (3) имеет ту же ОФ, что и линейная система

$$\dot{x} = Ax \cos t, \quad \dot{y} = Bx e^{C \sin t} \cos t. \quad (4)$$

нетрудно. Согласно [2], достаточно проверить тождество (2) для вектор-функции Δ , находящейся в системе (3).

ОФ линейной системы (4), а также системы (3) имеет вид:

$$F_1 = x e^{-2A \sin t}, \quad F_2 = \frac{B}{C + A} x (e^{-(C+2A) \sin t} - e^{C \sin t}) + y.$$

Поэтому отображение за период $[-\omega; \omega]$ будут определять функции

$$U = F_1(-\omega; x, y) = x e^{2A \sin \omega}, \quad V = F_2(-\omega; x, y) = \frac{B}{C + A} x (e^{(C+2A) \sin \omega} + e^{-C \sin \omega}) + y.$$

Соответственно отображение за период $[-\pi; \pi]$ есть тождественное отображение $U = x$, $V = y$.

Это и доказывает теорему.

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений*. Мн.: Изд-во «Университетское», 1986. 76 с.
2. Мироненко В. В. // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 10. С. 1325–1332.

КЛАССИФИКАЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ВПОЛНЕ РАЗРЕШИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.Н. Горбузов, В.Ю. Тыщенко

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
gorbuzov@grsu.by, valentinet@mail.ru

Рассматриваются вещественные голоморфные вполне разрешимые [1] линейные системы уравнений в полных дифференциалах

$$dx = \sum_{j=1}^m A_j(t_1, \dots, t_m) x dt_j \quad (1)$$

и

$$dx = \sum_{j=1}^m B_j(t_1, \dots, t_m) x dt_j, \quad (2)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, квадратные матрицы $A_j = \|a_{ikj}\|$ и $B_j = \|b_{ikj}\|$ размера n состоят из 1-периодических по своим аргументам голоморфных функций $a_{ikj} : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, $b_{ikj} : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Общие решения голоморфных вполне разрешимых линейных систем уравнений в полных дифференциалах (1) и (2) определяют, соответственно, накрывающие слоения $[1, 2]$ L^1 и L^2 на многообразии $\mathbf{R}^n \times T^m$, где T^m есть m -мерный тор.

Будем говорить, что голоморфные вполне разрешимые линейные системы уравнений в полных дифференциалах (1) и (2) **топологически (гладко, голоморфно) эквивалентны**, если существует гомеоморфизм (диффеоморфизм, бигоморфизм) $h : \mathbf{R}^n \times T^m \rightarrow \mathbf{R}^n \times T^m$, переводящий слой слоения L^1 в слой слоения L^2 .

Учитывая, что группы монодромии систем (1) и (2) абелевы, на основании критериев топологической (гладкой, голоморфной) сопряженности вещественных линейных абелевых групп [2] получены критерии топологической (гладкой, голоморфной) эквивалентности этих систем.

В частности, имеют место такие утверждения.

Теорема 1. *Голоморфные вполне разрешимые линейные системы уравнений в полных дифференциалах с периодическими коэффициентами при $m > 1$ структурно неустойчивы.*

Теорема 2. *Голоморфные вполне разрешимые линейные системы уравнений в полных дифференциалах с периодическими коэффициентами при $m = 1$ гладко (голоморфно) эквивалентны тогда и только тогда, когда их группы монодромии \mathbb{R} линейно сопряжены.*